

O METODĂ ITERATIVĂ OPTIMALĂ PENTRU O CLASĂ DE OSCILATORI PUTERNIC NELINIARI

1. Introducere

Sistemele oscilatorii fizice și mecanice sunt adesea exprimate de ecuații diferențiale neliniare. În multe cazuri, este posibilă înlocuirea ecuației diferențiale neliniare cu o ecuație diferențială corespunzătoare care aproximează ecuația neliniară originală pentru a da rezultate utile. De multe ori asemenea linearizare nu este fezabilă și pentru această situație ecuația diferențială neliniară originală trebuie tratată ca atare. Este unanim acceptat faptul că, caracteristicile generale și comportamentul unei ecuații diferențiale neliniare arbitrare nu sunt pe deplin înțelese. În general, studiul ecuațiilor diferențiale neliniare care nu se limitează la o gamă de clase speciale a ecuațiilor și metoda soluției de obicei implică un număr limitat de tehnici pentru obținerea aproximărilor analitice ale soluției.

Există unele abordări de aproximare a soluțiilor unui sistem oscilatoriu neliniar. Cele mai comune metode, aplicate pe scară largă, pentru ecuațiile diferențiale neliniare sunt metodele de perturbare. Aceste metode implică extinderea unei soluții pentru o ecuație diferențială în serie într-un parametru mic. Cu toate acestea, utilizarea teoriei perturbației în multe probleme practice importante, pur și simplu cade pentru parametrii din afara unui anumit interval specificat. Prin urmare, ar trebui dezvoltate noi tehnici analitice pentru a depăși aceste neajunsuri. O astfel de tehnică nouă ar trebuie să lucreze într-o gamă mai largă de parametrii și trebuie să realizeze soluții analitice aproximative precise și în afara capacității și acoperirii metodei clasice a perturbațiilor.

Au fost propuse unele extinderi ale metodei perturbației Lindsted-Poincare la sistemele puternic neliniare. A fost introdus un nou parametru astfel încât acesta să rămână mic indiferent de mărimea parametrului original. În acest fel, un sistem puternic neliniar cu parametrii mari este transformat într-un sistem cu parametru mic cu privire la noul parametru. Cu toate acestea, această metodă necesită partea liniară nenulă a forței de restaurare. Metoda balanței armonice este o procedură de ecuații diferențiale cu ajutorul seriilor Fourier trunchiate. Deși această metodă poate fi aplicată la problemele oscilatorii neliniare cu termeni neliniari precum și la probleme fără un parametru mic, este foarte dificil să se construiască soluții analitice de ordin superior de seturi de ecuații algebrice neliniare complicate. Lau și Cheung au prezentat metoda incrementală a echilibrului armonic care este o metodă semianalitică și numerică și a fost aplicată la analiza vibrațiilor structurale neliniare periodice. Diferite generalizări ale metodei balanței armonice au fost prezentate de către alți câțiva cercetători: reprezentări raționale în, o metodă intrinsecă de analiză armonică, utilizarea funcțiilor eliptice Jacobi.

Un amestec de metodologii au fost raportate în încercarea de a dezvolta noi tehnici care să depășească unele neajunsuri ale metodei perturbației.

În această notă vom aplica o Metodă Iterativă Optimală pentru a găsi soluția periodică analitică a unui oscilator neliniar. În această procedură apar un număr finit de parametri necunoscuți și soluția aproximativă obținută prin metoda propusă converge rapid la soluția exactă.

2. Metoda Iterativă Optimală

În această notă vom considera următoarea ecuație neliniară

$$\ddot{x} + x + f(x) = 0 \quad (1)$$

unde f se presupune a fi o funcție neliniară care poate fi extinsă în serii Taylor și Fourier, și $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Din formula binecunoscută

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + \frac{h}{1!} f_x(t_0) + \dots \quad (2)$$

unde $f_x = \frac{df}{dx}$,

vom considera

$$t_0 = C_1 \cos \tau, h(t, C_i) = \sum_{i=2}^n C_i \cos i\tau \quad (3)$$

unde $C_1, C_2, \dots$ sunt constante necunoscute în acest moment.

Considerând $x_0 = t_0 + h$, pentru (1) și (2) putem construi următoarea iterație cu formula:

$$\ddot{x}_{n+1} + x_{n+1} + f(x_n) = 0, n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

În cazul în care condițiile inițiale pentru (1) sunt

$$x(0) = A, \dot{x}(0) = 0 \quad (5)$$

atunci pentru (4) condițiile inițiale devin

$$x_{n+1}(0) = A, \dot{x}_{n+1}(0) = 0$$

(6)

În dezvoltarea de față considerăm un sistem cu un grad de libertate descris prin

$$\ddot{x} + x + ax^{\frac{1}{3}} + b\sin x = 0$$

(7)

cu respectarea condițiilor inițiale

$$x(0) = A, \dot{x}(0) = 0$$

(8)

Dacă Ω este frecvența sistemului descris de (7) și introducând o nouă variabilă independentă

$$\tau = \Omega t$$

(9)

apoi (1) devine

$$x'' + x + f(x) = 0$$

(10)

unde $' = \frac{d}{d\tau}$ și

$$f(x) = \left(\frac{1}{\Omega^2} - 1\right)x + \frac{a}{\Omega^2}x^{\frac{1}{3}} + \frac{b}{\Omega^2}\sin x$$

(11)

Pentru $n = 1$ în (4) obținem doar o iterație dată de

$$x_1' + x_1 + f(x_0) = 0, x_0 = t_0(\tau) + h(\tau, C_i)$$

(12)

unde

$$f(x_0) = f(t_0) + h(\tau, C_i)f_x(t_0)$$

(13)

Pentru t_0 dat de (3) obținem

$$f(t_0) = f(C_1 \cos \tau) = \left(\frac{1}{\Omega^2} - 1\right)C_1 \cos \tau + \frac{a}{\Omega^2}C_1^{\frac{1}{3}} \cos^{\frac{1}{3}} \tau + \frac{b}{\Omega^2} \sin(C_1 \cos \tau)$$

(14)

Termenii în $\cos^{\frac{1}{3}}x$ și $\sin(C_1 \cos \tau)$ pot fi dezvoltati în serii de puteri

$$\cos^{\frac{1}{3}}x = \alpha(\cos \tau - \frac{1}{5}\cos 3\tau + \frac{1}{10}\cos 5\tau - \frac{7}{110}\cos 7\tau + \frac{1}{22}\cos 9\tau - \frac{13}{374}\cos 11\tau + \dots)$$
(15)

$$\sin(C_1 \cos \tau) = C_1 \cos \tau - \frac{C_1^3 \cos^3 \tau}{3!} + \frac{C_1^5 \cos^5 \tau}{5!} - \frac{C_1^7 \cos^7 \tau}{7!} + \frac{C_1^9 \cos^9 \tau}{9!} + \dots$$
(16)

$$\alpha = 1.15958526696393$$

(17)

Folosind (15) și (18), ecuația (14) poate fi exprimată sub forma

$$\begin{aligned} f(t_0) = & \left[\left(\frac{1}{\Omega^2} - 1 \right) C_1 + \frac{a\alpha C_1^{\frac{1}{3}}}{\Omega^2} + \frac{bC_1}{\Omega^2} \left(1 - \frac{C_1^2}{8} + \frac{C_1^4}{192} - \frac{C_1^6}{9216} + \frac{C_1^8}{737280} \right) \right] \cos \tau \\ & + \left[-\frac{a\alpha C_1^{\frac{1}{3}}}{5\Omega^2} - \frac{bC_1^3}{\Omega^2} \left(\frac{1}{24} - \frac{C_1^2}{384} + \frac{C_1^4}{15360} - \frac{C_1^6}{1105920} \right) \right] \cos 3\tau \\ & + \left[\frac{a\alpha C_1^{\frac{1}{3}}}{10\Omega^2} + \frac{bC_1^5}{\Omega^2} \left(\frac{1}{1920} - \frac{C_1^2}{46080} + \frac{C_1^4}{2580480} \right) \right] \cos 5\tau \\ & + \left[-\frac{7a\alpha C_1^{\frac{1}{3}}}{110\Omega^2} - \frac{bC_1^7}{\Omega^2} \left(\frac{1}{322560} - \frac{C_1^2}{10321920} \right) \right] \cos 7\tau \\ & + \left[\frac{a\alpha C_1^{\frac{1}{3}}}{22\Omega^2} + \frac{bC_1^9}{92897280} \right] \cos 9\tau + \dots \end{aligned}$$
(18)

Termenul secund din (13) devine

$$f_x(t_0) = \frac{1}{\Omega^2} - 1 + \frac{a}{3\Omega^2 C_1^{\frac{2}{3}} \cos^{\frac{2}{3}} \tau} + \frac{b}{\Omega^2} \cos(C_1 \cos \tau)$$
(19)

Dar al treilea termen din (13) poate fi scris sub forma

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos^{\frac{2}{3}}\tau} &= \frac{\cos^{\frac{1}{3}}\tau}{\cos\tau} \\ &= \frac{\alpha}{\cos\tau} \left(\cos\tau - \frac{1}{5}\cos 3\tau + \frac{1}{10}\cos 5\tau - \frac{7}{110}\cos 7\tau + \frac{1}{22}\cos 9\tau - \frac{13}{374}\cos 11\tau \right. \\ &\quad \left. + \dots \right)\end{aligned}\tag{20}$$

Pe de altă parte, forma condiției

$$\begin{aligned}\cos\tau - \frac{1}{5}\cos 3\tau + \frac{1}{10}\cos 5\tau - \frac{7}{110}\cos 7\tau + \frac{1}{22}\cos 9\tau - \frac{13}{374}\cos 11\tau \\ = \cos\tau(B_0 + 2B_1\cos 2\tau + 2B_2\cos 4\tau + 2B_3\cos 6\tau + 2B_4\cos 8\tau \\ + 2B_5\cos 10\tau)\end{aligned}\tag{21}$$

este obținută

$$B_0 = \frac{270}{187}, B_1 = -\frac{83}{187}, B_2 = \frac{228}{935}, B_3 = -\frac{269}{1870}, B_4 = \frac{15}{187}, B_5 = -\frac{13}{374}\tag{22}$$

și prin urmare (20) devine

$$\frac{1}{\cos^{\frac{2}{3}}\tau} = \alpha \left(\frac{270}{187} - \frac{166}{187}\cos 2\tau + \frac{456}{935}\cos 4\tau - \frac{269}{935}\cos 6\tau + \frac{30}{187}\cos 8\tau - \frac{13}{187}\cos 10\tau + \dots \right)\tag{23}$$

Ultimul termen din (19) poate fi scris ca

$$\cos(C_1\cos\tau) = 1 - \frac{C_1^2\cos^2\tau}{2!} + \frac{C_1^4\cos^4\tau}{4!} - \frac{C_1^6\cos^6\tau}{6!} + \frac{C_1^8\cos^8\tau}{8!} + \dots\tag{24}$$

sau

$$\begin{aligned}
\cos(C_1 \cos \tau) &= 1 - \frac{C_1^2}{4} + \frac{C_1^4}{64} - \frac{C_1^6}{2304} + \frac{C_1^8}{147456} \\
&+ \left(-\frac{C_1^2}{4} + \frac{C_1^4}{48} - \frac{C_1^6}{1536} + \frac{C_1^8}{92160} + \dots \right) \cos 2\tau \\
&+ \left(\frac{C_1^4}{192} - \frac{C_1^6}{3840} + \frac{C_1^8}{184320} \right) \cos 4\tau + \left(-\frac{C_1^6}{23040} + \frac{C_1^8}{645120} + \dots \right) \cos 6\tau \\
&+ \left(\frac{C_1^8}{5160960} + \dots \right) \cos 8\tau + \dots
\end{aligned}
\tag{25}$$

Folosind (23) și (25), ecuația (19) devine

$$\begin{aligned}
f_x(t_0) &= \frac{1}{\Omega^2} - 1 + \frac{90a\alpha}{187\Omega^2 C_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{b}{\Omega^2} \left(1 - \frac{C_1^2}{4} + \frac{C_1^4}{64} - \frac{C_1^6}{2304} + \frac{C_1^8}{147456} + \dots \right) \\
&+ \left[-\frac{166a\alpha}{561\Omega^2 C_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{bC_1^2}{4\Omega^2} \left(-1 + \frac{C_1^2}{12} - \frac{C_1^4}{384} + \frac{C_1^6}{23040} + \dots \right) \right] \cos 2\tau \\
&+ \left[\frac{152a\alpha}{935\Omega^2 C_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{bC_1^4}{192\Omega^2} \left(1 - \frac{C_1^2}{20} + \frac{C_1^4}{960} + \dots \right) \right] \cos 4\tau \\
&+ \left[-\frac{269a\alpha}{2805\Omega^2 C_1^{\frac{2}{3}}} - \frac{bC_1^6}{23040\Omega^2} \left(1 - \frac{C_1^2}{28} + \dots \right) \right] \cos 6\tau \\
&+ \left[\frac{10a\alpha}{187\Omega^2 C_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{bC_1^8}{5160960\Omega^2} + \dots \right] \cos 8\tau
\end{aligned}
\tag{26}$$

Din (18) remarcăm că $f(x_0)$ este o combinație de $\cos \tau$, $\cos 3\tau$, $\cos 5\tau$, ... și prin urmare alegem $h(\tau, C_i)$ cum ar fi termenul $h(\tau, C_i)f_x(x_0)$ din (13) să fie de aceeași formă ca și $f(x_0)$:

$$h(\tau, C_i) = 2C_2 \cos 3\tau + 2C_3 \cos 5\tau + 2C_4 \cos 7\tau
\tag{27}$$

unde C_2 , C_3 și C_4 sunt constante necunoscute la acest moment. În acest fel, prin relațiile (18), (26) și (27), ecuația (13) poate fi scrisă sub forma

$$\begin{aligned}
f(x_0) = & \left\{ \left(\frac{1}{\Omega^2} - 1 \right) C_1 + \frac{a\alpha C_1^{\frac{1}{3}}}{\Omega^2} + \frac{bC_1}{\Omega^2} \left(1 - \frac{C_1}{8} + \frac{C_1^4}{192} - \frac{C_1^6}{9216} + \frac{C_1^8}{737280} + \dots \right) \right. \\
& + C_2 \left[-\frac{374a\alpha}{2805\Omega^2 C_1^{\frac{2}{3}}} - \frac{bC_1^2}{4\Omega^2} \left(1 - \frac{5C_1^2}{48} + \frac{7C_1^4}{1920} - \frac{C_1^6}{15360} + \dots \right) \right] \\
& + C_3 \left[\frac{187a\alpha}{2805\Omega^2 C_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{bC_1^4}{192\Omega^2} \left(1 - \frac{7C_1^2}{120} + \frac{3C_1^4}{2240} + \dots \right) \right] \\
& \left. + C_4 \left[-\frac{374a\alpha}{2805\Omega^2 C_1^{\frac{2}{3}}} - \frac{bC_1^6}{23040\Omega^2} \left(1 - \frac{9C_1^2}{224} + \dots \right) \right] \right\} \cos 3\tau + N.T.
\end{aligned}
\tag{28}$$

unde $N.T.$ reprezintă termeni nerezonanți.

Este aleasă soluția (12) pentru că nu conține termeni seculari, ceea ce impune ca, coeficienții în $\cos \tau$ să dispară din (28), adică

$$\begin{aligned}
\Omega^2 = & 1 + \frac{a\alpha}{C_1^{\frac{2}{3}}} + b \left(1 - \frac{C_1}{8} + \frac{C_1^4}{192} - \frac{C_1^6}{9216} + \frac{C_1^8}{737280} + \dots \right) \\
& + \frac{C_2}{C_1} \left[-\frac{374a\alpha}{2805C_1^{\frac{2}{3}}} - \frac{bC_1^2}{4} \left(1 - \frac{5C_1^2}{48} + \frac{7C_1^4}{1920} - \frac{C_1^6}{15360} + \dots \right) \right] \\
& + \frac{C_3}{C_1} \left[\frac{187a\alpha}{2805C_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{bC_1^4}{192} \left(1 - \frac{7C_1^2}{120} + \frac{3C_1^4}{2240} + \dots \right) \right] \\
& + \frac{C_4}{C_1} \left[-\frac{119a\alpha}{2805C_1^{\frac{2}{3}}} - \frac{bC_1^6}{23040} \left(1 - \frac{9C_1^2}{224} + \dots \right) \right]
\end{aligned}
\tag{29}$$

Ecuția (28) devine

$$\begin{aligned}
f(x_0) = & [\alpha_3 + (2\beta_0 + \beta_6)C_2 + (\beta_2 + \beta_8)C_3 + \beta_4 C_4] \cos 3\tau \\
& + [\alpha_5 + (\beta_2 + \beta_8)C_2 + 2\beta_0 C_3 + \beta_2 C_4] \cos 5\tau + [\alpha_7 + \beta_4 C_2 + \beta_0 C_4] \cos 7\tau \\
& + [\alpha_9 + \beta_6 C_2 + \beta_4 C_3 + \beta_2 C_4] \cos 9\tau
\end{aligned}
\tag{30}$$

unde

$$\alpha_3 = -\frac{a\alpha C_1^{\frac{1}{3}}}{5\Omega^2} - \frac{bC_1^3}{\Omega^2} \left(\frac{1}{24} - \frac{C_1^2}{384} + \frac{C_1^4}{15360} - \frac{C_1^6}{1105920} + \dots \right)$$

$$\alpha_5 = \frac{a\alpha C_1^{\frac{1}{3}}}{10\Omega^2} - \frac{bC_1^5}{1920\Omega^2} \left(1 - \frac{C_1^2}{24} + \frac{C_1^4}{1344} + \dots \right)$$

$$\alpha_7 = -\frac{7a\alpha C_1^{\frac{1}{3}}}{110\Omega^2} - \frac{bC_1^7}{322560\Omega^2} \left(1 - \frac{C_1^2}{32} + \dots \right)$$

$$\alpha_9 = \frac{a\alpha C_1^{\frac{1}{3}}}{22\Omega^2} + \frac{bC_1^9}{92897280\Omega^2}$$

$$\beta_0 = \frac{1}{\Omega^2} - 1 + \frac{b}{\Omega^2} \left(1 - \frac{C_1^2}{4} + \frac{C_1^4}{64} - \frac{C_1^6}{2304} + \frac{C_1^8}{147456} + \dots \right) + \frac{90a\alpha}{186\Omega^2 C_1^{\frac{2}{3}}}$$

$$\beta_2 = -\frac{166a\alpha}{561\Omega^2 C_1^{\frac{2}{3}}} - \frac{bC_1^2}{4\Omega^2} \left(1 - \frac{C_1^2}{12} + \frac{C_1^4}{384} - \frac{C_1^6}{23040} + \dots \right)$$

$$\beta_4 = \frac{152a\alpha}{935\Omega^2 C_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{bC_1^4}{192\Omega^2} \left(1 - \frac{C_1^2}{20} + \frac{C_1^4}{960} + \dots \right)$$

$$\beta_6 = -\frac{269a\alpha}{2805\Omega^2 C_1^{\frac{2}{3}}} - \frac{bC_1^6}{2304\Omega^2} \left(1 - \frac{C_1^2}{28} + \dots \right)$$

$$\beta_8 = \frac{10a\alpha}{187\Omega^2 C_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{bC_1^8}{5160960\Omega^2} + \dots$$

(31)

Din (30), (13), (12), (6) și (9) obținem aproximația de ordinul întâi a soluției

$$\begin{aligned} x_1(t) = & A \cos \Omega t + \frac{1}{8} [\alpha_3 + (2\beta_0 + \beta_6)C_2 + (\beta_2 + \beta_8)C_3 + \beta_4 C_4] (\cos 3\Omega t - \cos \Omega t) \\ & + \frac{1}{24} [\alpha_5 + (\beta_2 + \beta_8)C_2 + 2\beta_0 C_3 + \beta_2 C_4] (\cos 5\Omega t - \cos \Omega t) \\ & + \frac{1}{48} [\alpha_7 + \beta_4 C_2 + \beta_2 C_3 + 2\beta_0 C_4] (\cos 7\Omega t - \cos \Omega t) \\ & + \frac{1}{80} [\alpha_9 + \beta_6 C_2 + \beta_4 C_3 + \beta_2 C_4] (\cos 9\Omega t - \cos \Omega t) \end{aligned}$$

(32)

unde Ω este dat de (29)

Parametrii C_1, C_2, C_3 și C_4 pot fi optimal determinați folosind câteva proceduri. Astfel, valoarea optimă pentru parametrii C_i poate fi găsită ca impunerea funcțională rămasă dată de

$$J = \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} \left[\ddot{x}_1(t) + x_1(t) + ax_1^{\frac{1}{3}}(t) + b \sin x_1(t) \right]^2 dt$$

(33)

să fie minim:

$$\frac{\partial J}{\partial C_1} = \frac{\partial J}{\partial C_2} = \frac{\partial J}{\partial C_3} = \frac{\partial J}{\partial C_4} = 0$$

(34)

Valorile optime pentru parametrii C_1, C_2, C_3 și C_4 pot fi, de asemenea, determinate folosind metoda redistribuirii, metoda celor mai mici pătrate, metoda Galerkin și așa mai departe. În acest mod, soluția (32) în prima aproximare este bine determinată.

3. Rezultate și discuții

Vom ilustra aplicabilitatea, precizia și eficacitatea abordării propuse prin compararea soluției periodice analitice aproximative cu rezultatele obținute prin integrarea numerică folosind metoda Rung-Kutta de ordinul al patrulea. Comparația a fost efectuată în ceea ce privește deplasările, spațiile fazei și a restului ecuației originale. Aceste comparații provin din următoarele figuri pentru câteva cazuri.

Cazul 1: Pentru $a = 1, b = 1, A = 1$, urmărind procedura descrisă în secțiunea anterioară se obțin valorile optime de ale parametrilor necunoscuți:

$$C_1 = 0.0204848, C_2 = 0.015155$$

$$C_3 = -0.00058308, C_4 = 0.00031341$$

(35)

și prin urmare, $\Omega = 1.48768$. Luând în considerare (35), în figura 1 este prezentată o comparație între soluția aproximativă (linia albastră) și soluția obținută prin simulări numerice (linia roșie).

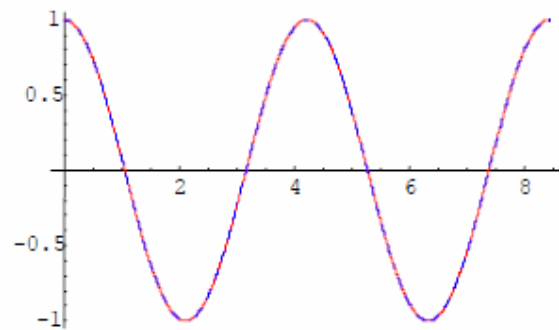


Figura 1. Comparația dintre soluția aproximativă și cea numerică în cazul 1

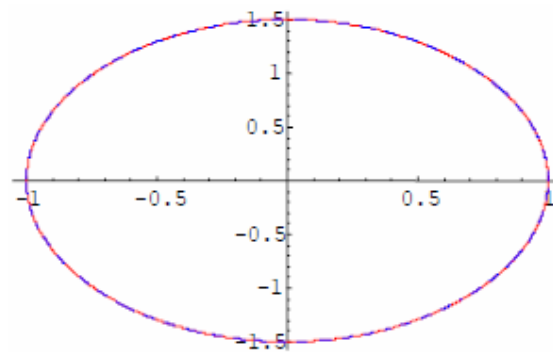


Figura 2. Comparația între rezultatele aproximative și cele numerice în ceea ce privește planul fazelor în cazul 1

Figura 2 prezintă o comparație între rezultatele aproximative și cele numerice în ceea ce privește planul fazelor. Pentru a oferi o evidență cuprinzătoare a acurateței rezultatelor, restul ecuației inițiale a fost calculat:

$$R(t) = \ddot{x}_1(t) + \dot{x}_1(t) + ax_1^{\frac{1}{3}}(t) + b\sin x_1(t)$$

(36)

O reprezentare grafică a acestei relații pentru cazul 1 este prezentată în figura 3.

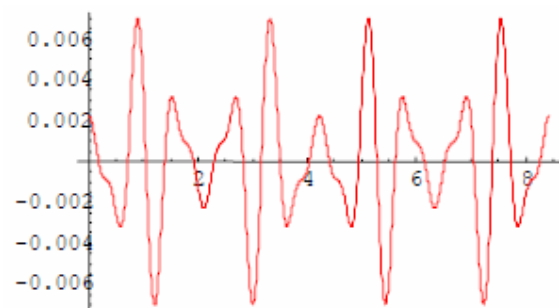


Figura 3. Restul ecuației inițiale în cazul 1

Cazul 2: Pentru $a = 1$, $b = 1$, $A = 2$, urmărind aceeași procedură obținem:

$$C_1 = 0.479195, C_2 = 0.168946$$

$$C_3 = -0.0276235, C_4 = 0.00578476$$

(37)

și prin urmare, $\Omega = 1.38091$. Comparațiile între rezultatele aproximative și cele numerice pentru cazul 2 sunt prezentate în figurile 4-6.

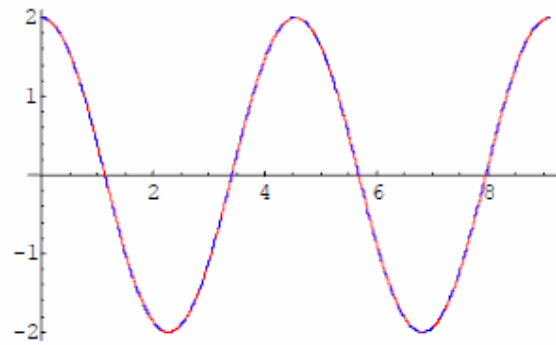


Figura 4. Comparația dintre soluția aproximativă și cea numerică în cazul 2

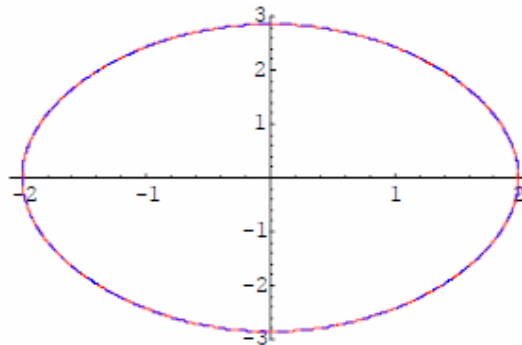


Figura 5. Comparația între rezultatele aproximative și cele numerice în ceea ce privește planul fazelor în cazul 2

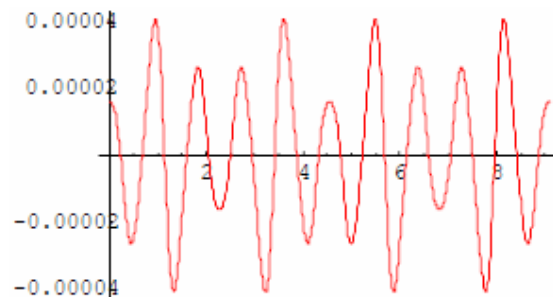


Figura 6. Restul ecuației inițiale în cazul 2

Cazul 3: Pentru $a = 1$, $b = 1$, $A = 10$, obținem:

$$C_1 = 3.18744, C_2 = -1.01844$$

$$C_3 = 1.23342, C_4 = -0.47623$$

(38)

și prin urmare, $\Omega = 1.15813$. Comparațiile între rezultatele aproximative și cele numerice pentru cazul 3 sunt prezentate în figurile 7-9.

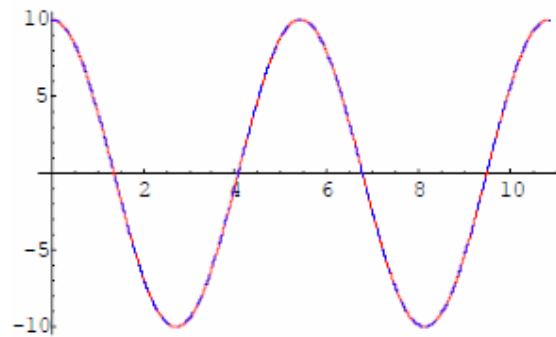


Figura 7. Comparația dintre soluția aproximativă și cea numerică în cazul 3

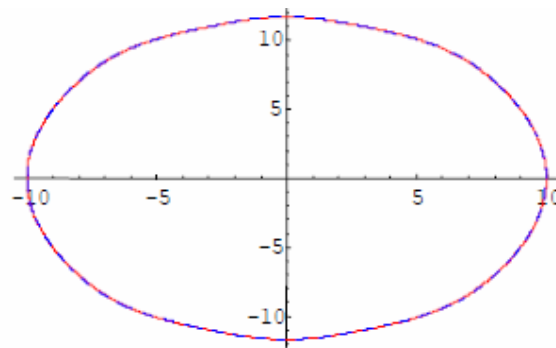


Figura 8. Comparația între rezultatele aproximative și cele numerice în ceea ce privește planul fazelor în cazul 3

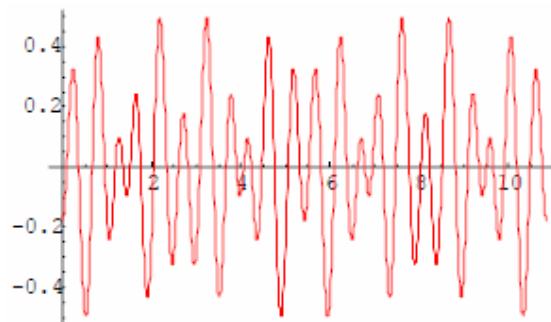


Figura 9. Restul ecuației inițiale în cazul 3

Cazul 4: Pentru $a = 1$, $b = 1$, $A = 40$, obținem:

$$C_1 = 0.75452, C_2 = -0.437792$$

$$C_3 = -0.0513117, C_4 = -0.362569$$

(39)

și prin urmare, $\Omega = 1.15741$. Comparațiile între rezultatele aproximative și cele numerice pentru cazul 3 sunt prezentate în figurile 10-12.

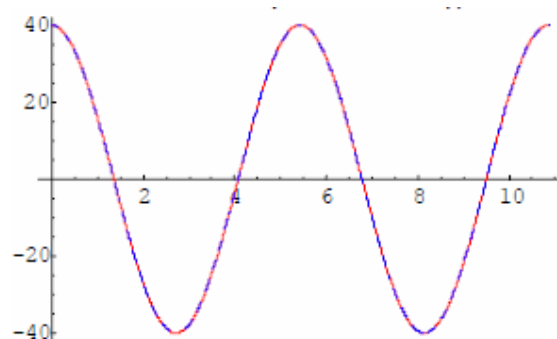


Figura 10. Comparația dintre soluția aproximativă și cea numerică în cazul 4

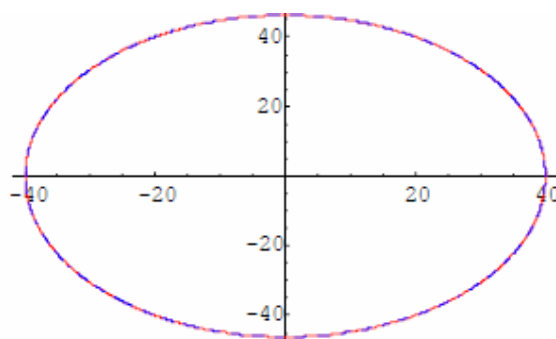


Figura 11. Comparația între rezultatele aproximative și cele numerice în ceea ce privește planul fazelor în cazul 4

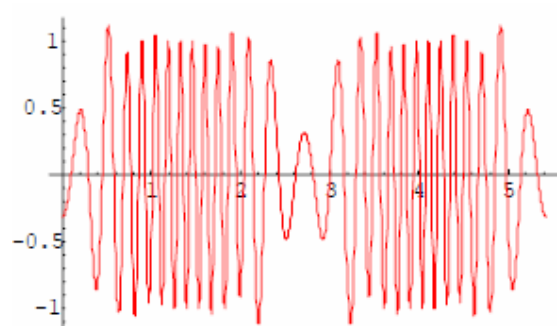


Figura 12. Restul ecuației inițiale în cazul 4

Se poate observa din figurile 1-12 că rezultatele obținute folosind MIO sunt identice cu cele obținute prin simulări numerice pentru o gamă largă a amplitudinilor inițiale.

4. Concluzii

În această notă, Metoda Iterativă Optimală (MIO) este angajată să propună o nouă soluție periodică analitică aproximativă pentru câteva oscilații neliniare. Valabilitatea metodei este ilustrată în mișcarea conservativă a unui sistem cu un singur grad de libertate. Procedura noastră este valabilă chiar dacă ecuația neliniară nu conține nici parametri mici, nici parametri mari. Spre deosebire de alte metode, MIO accelerează rapid convergența soluției deoarece după o singură iterație au fost atinse rezultate foarte precise. Față de alte tehnici ale perturbației, procedura noastră oferă o modalitate convenabilă de a controla și a regla convergența, atunci când este necesar. MIO este o procedură iterativă și iterația se efectuează într-un mod foarte simplu prin identificarea optimă a unor coeficienți și prin urmare sunt obținute aproximări foarte bune în puțini termeni. De fapt, puterea capitală a MIO este convergența sa rapidă deoarece după o singură iterație se converge la soluția exactă.

În această notă se propune o nouă abordare a problemelor neliniare și această versiune a metodei se dovedește a fi foarte rapidă și eficientă și acest lucru este dovedit prin compararea soluțiilor analitice aproximative obținute prin metoda propusă și soluțiile obținute prin simulări numerice. Această abordare prezintă un pas în încercarea de a dezvolta o nouă tehnică analitică neliniară în absența unor parametri mici sau mari.